アンサンブル可変的パラメトリック射影フィルタによる熱伝導方程式の逆問題に対する数値解法

情報科学科　山口眞里菜　　　指導教員：代田健二

1　はじめに

私たちの日常の中には，与えられたデータから支配方程式の関数を同定する逆問題が存在している．身近な例では，高熱・のどの痛みなどの症状やその期間からどのような病気であるか診断する問題も，逆問題だと言われている．この問題は，設定上アダマールの意味で非適切になる．アダマールの意味で非適切とは，「解が一意である」，「解が存在する」，「解が与えられたデータに対して連続的に依存する」の少なくとも一つが成り立たないことである．非適切な問題である逆問題は真の解を求めることが困難である．しかしその重要性から，応用に向けて研究が盛んに行われている．その一つが，前田が開発したアンサンブルパラメトリック射影フィルタ [1] である．アンサンブルパラメトリック射影フィルタとはパラメトリック射影フィルタとデータ同化手法を組み合わせたもので，適切なパラメータを選択することで精度が変化することがわかっている．本研究では, アンサンブルパラメトリック射影フィルタにおけるパラメータ γ の値を，登坂が提案した可変的フィルタ理論 [2] を基礎に決定する．また，数値実験により提案手法の妥当性を検証する．

2　一次元熱伝導逆問題

本研究で対象とする一次元熱伝導逆問題について説明する．一様な単位断面積を有し，その側面が断熱性材料で覆われたまっすぐな長さ 1 の棒の熱伝導現象を考える．この棒の任意の場所 x $(0 \le x \le 1)$ と時刻 t $(0 \le t)$ における温度を $u(x,t)$ とする．λ を熱伝導率，$f(x)$ を初期温度分布とするとき，熱伝導方程式の順問題は以下のように表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \le x \le 1\,.\,0 \le t), \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le 1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (0 \le t)\,. \end{cases}$$

この問題に対して，本研究では次の逆問題を考える．

一次元熱伝導逆問題

棒の両端の温度勾配の時刻歴 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t), \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t)$ $(0 \le t \le T)$ が与えられたとき，その温度勾配より初期温度分布 $f(x)$ を推定せよ.

熱伝導方程式の t を $-t$ に置き換えると，物理的意味で本質的に異なる方程式が得られる．これは，熱伝導現象が時間を逆にすることができない非可逆現象であることを意味している．よって，考える逆問題は非適切問題となる．

3　アンサンブルパラメトリック射影フィルタ

一次元熱伝導逆問題を数値的に解くため，本研究ではアンサンブルパラメトリック射影フィルタを適用する．

$\boldsymbol{w}^k$ を k ステップにおける観測誤差とし，次の観測モデルを考える．

$$\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}_\theta^k \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{w}^k$$

観測モデルは求める対象である初期値ベクトル $\boldsymbol{u}^0$ を用いて，次のとおりに書くことができる．

$$\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{w}\,.$$

ただし，$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}^0, \cdots, \boldsymbol{y}^{N_T})^T$, $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}^0, \cdots, \boldsymbol{w}^{N_T})^T$ であり，

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}_\theta \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}_\theta^{N_T} \end{pmatrix}.$$

観測誤差共分散行列を対角に並べた行列を $\boldsymbol{R}$ とするとき，パラメトリック射影フィルタ [3] による初期値ベクトル同定法は，次のとおりになる．

$$\boldsymbol{u}_{l+1}^0 = \boldsymbol{u}_l^0 + \boldsymbol{B}_{\gamma,l}(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{u}_l^0) \quad (l = 0,\,1,\,2,\,\ldots\ldots),$$
$$\boldsymbol{B}_{\gamma,l} = \tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} + \gamma \boldsymbol{R}_l)^{-1}.$$

ここで，$\gamma \ge 0$ は与えられたパラメータである．この同定法に，データ同化手法におけるアンサンブル近似の考えを導入する．この考え方をアンサンブルパラメトリック射影フィルタという．

4　可変的フィルタ理論

アンサンブルパラメトリック射影フィルタにおけるパラメータ γ の値を，可変的フィルタ理論により求める．状態ベクトルはフィルタゲインと観測ベクトルの積で近似可能と仮定する，すなわち次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{u}_l \approx \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{y}.$$

よって次式を得る．

$$\boldsymbol{B}_l \boldsymbol{y} = (\tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{R}}_l \tilde{\boldsymbol{H}} + \gamma \boldsymbol{I})^{-1} \tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{R}}_l^{-1} \boldsymbol{y}.$$

したがって，

$$\gamma \boldsymbol{u}_l^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_l^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_l.$$

ただし，

$$\boldsymbol{b}_l = \tilde{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{R}}_l^{-1} (\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{u}).$$

以上より，γ_l は $\boldsymbol{u}_l$ と $\boldsymbol{b}_l$ の内積と $\boldsymbol{u}_l$ のノルムを用いて次式を与えられる．

$$\gamma_l = \frac{\boldsymbol{u}_l^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_l}{||\boldsymbol{u}_l||^2}$$

5　数値実験

熱伝導方程式の解 $u(x,\,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ により真の温度勾配と求める初期値 $f(x) = u(x,\,0) = \sin \pi x$ を与える．また各時刻 t における真の温度勾配ベクトル $\boldsymbol{y}_{\mathrm{true}}$ に対して，平均 0，分散 $\sigma^2 = (\delta\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{true}}\|_2/2)^2$ の正規分布に従う誤差を与えたものを観測データとする．熱伝導率 $\lambda = 1$, 空間分割数を 100，時刻刻み幅を $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とし，$\delta = 10^{-2}$，メンバ数を 1000 とした．このとき，提案手法により得られた同定結果は図 1 のとおりである．可変的に選択された γ の最終値は，5.5×10^4 であった．同定結果により，可変的フィルタ理論を用いることで適切なパラメータを自動選択できることが示唆された．今後は，提案手法の数学解析および他の逆問題解析への有効性について検証する．

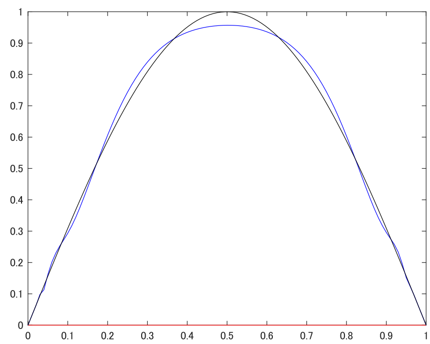

図 1　sinπ

参考文献

[1] 前田高志, データ同化手法を用いた偏微分方程式の逆問題に対する数値的再構成手法の研究, 愛知県立大学大学院情報科学研究科情報システム専攻修士論文, 2016.

[2] 登坂宣好, 可変的パラメトリック射影フィルタによるフレーム構造物の損傷同定解法, 計算数理工学論文集, Vol.7, 2008.

[3] 山下幸彦, 最適画像復元に関する理論的研究, 東京工業大学大学院情報工学専攻博士論文, 1993.